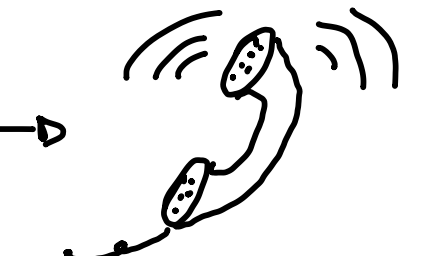


$\mathbb{R} \rightarrow$  But: Construire les séries de Fourier

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique. $f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

V espace vectoriel & $L = \{e_1, \dots, e_n\}$. L orthogonal
 $\Rightarrow L$ linéairement indépendante.

$L_0 = \{ \sin(nx) : n \in \mathbb{N}^* \} \cup \{ \cos(nx) : n \in \mathbb{N} \}$

$\rightarrow$ est orthogonal $\Rightarrow$ linéairement indépendante.

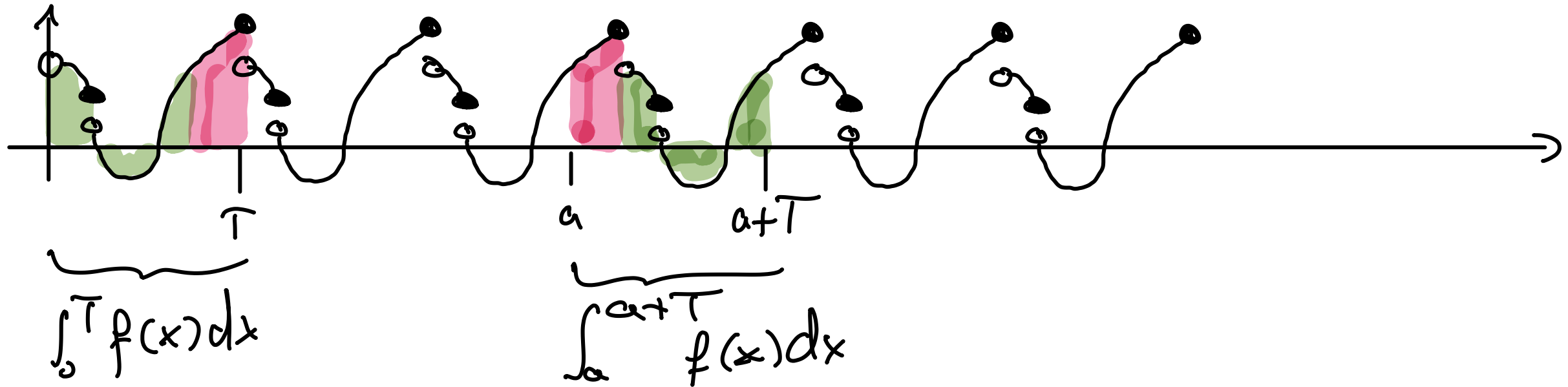
$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} m x\right) dx = \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} m x\right) dx$$

$$= \begin{cases} 1 \\ c \end{cases} \quad \text{si } n=m \\ \text{sinon,} \quad \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} m x\right) dx = 0$$

Proposition 4.4

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique, continue par morceaux. Alors,
 $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$



§4.2 Définition et convergence des séries de Fourier.

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est T -périodique et
$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right)$$

comment trouver les coeffs? (α_k, β_k) .



$\{e_1, \dots, e_n\}$ est
une base orthogonale
$$v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle} e_i$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \right) \right) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \\ &= \alpha_0 \cdot \underbrace{\frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cdot \underbrace{\frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx}_{\substack{\text{prop 4.3} \\ = \begin{cases} 1 & \text{si } k=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}} \right. \\ &\quad \left. + \beta_k \underbrace{\frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi}{T} kx\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx}_{\substack{\text{prop 4.3} \\ = 0}} \right) \\ &= \boxed{\alpha_n} \end{aligned}$$

Définition 4.5 : Coeff. de Fourier réels, somme partielle de Fourier, Séries de Fourier

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, T -périodique.

Les coefficients de Fourier réels de f sont définis par

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$

$$\forall n \geq 1 \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$

La somme partielle de Fourier de f d'ordre N est

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right\}$$

La série de Fourier de f est

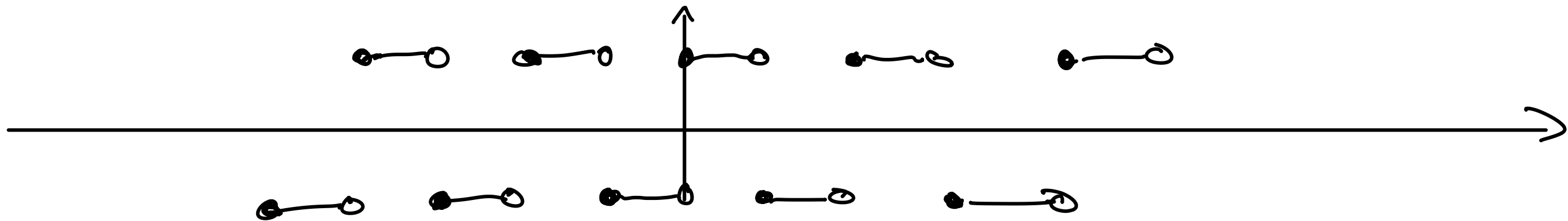
$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right\} \quad \text{si elle converge.}$$

Exemple 4.6

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$

étendue par 2-périodicité.

On fera souvent: On définit $f: [-T/2, T/2[\rightarrow \mathbb{R}$
et on étend par T -périodicité.



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = \int_{-1}^0 -1 dx + \int_0^1 1 dx = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(\pi \cdot n \cdot x) dx = \int_{-1}^0 -\cos(\pi n x) dx + \int_0^1 \cos(\pi n x) dx$$

$$\dots = 0$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \int_{-1}^1 f(x) \sin(\pi \cdot n \cdot x) dx = \int_{-1}^0 -\sin(\pi n x) dx + \int_0^1 \sin(\pi n x) dx \\
&= \left[\frac{\cos(\pi n x)}{\pi \cdot n} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{\cos(\pi n x)}{\pi \cdot n} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{1}{n\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overline{F}f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{(2k+1) \cdot \pi} \sin((2k+1) \cdot \pi \cdot x)$$

$\nearrow$
 $n=2k+1$

Question: Est-ce qu'elle converge? si oui, vers quoi?

Théorème 4.7 : Théorème de Dirichlet

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique, C^1 par morceaux.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$Ff(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2}$$

Remarque 4.8

(i) En réalité, l'hypothèse du thm (C^1 par morceaux) est encore plus faible que ça.

(ii) Ça nous donne un critère pour:

- approximer une fonction avec des fonctions C^∞
- calculer des séries.

Exemple 4.9

(i) On reprend $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

étendue par 2-périodicité.

On a vu que $\mathcal{F}f(\lambda) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1) \cdot \pi \cdot x)$

Vu que $f \in C'_{\text{mor}}$, on a

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1) \cdot \pi \cdot x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \text{ ou } 0 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

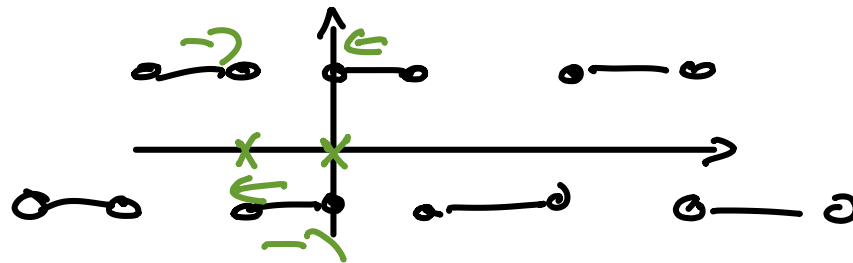
$n \geq 1$ impair

$$n = 2k - 1$$

$$n = 2k + 1$$

$$k \geq 1$$

$$k \geq 0$$



étendue par 2-périodicité.

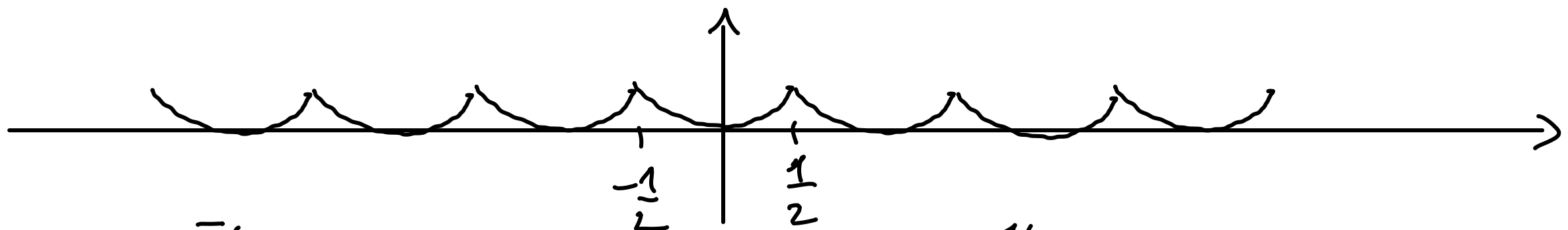
Par exemple si $x = \frac{1}{2}$

$$Ff\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} Ff\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left((2k+1) \cdot \pi \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \underbrace{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}_{\cos(k\pi) = (-1)^k} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

(ii) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, étendre par 1 - périodicité.



$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx = 2 \cdot \int_{-1/2}^{1/2} x^2 dx = \frac{2}{3} \left[x^3 \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{6}$$

$$a_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} x^2 \cos(2\pi \cdot n \cdot x) dx \stackrel{\text{IPP}}{=} 2 \left[x^2 \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} \right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$u = x^2 \quad v = \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi \cdot n}$$

$$u' = 2x \quad v' = \cos(2\pi n x)$$

$$- 2 \int_{-1/2}^{1/2} 2x \frac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} dx$$

$$= 2 \left(\frac{1}{4} \frac{\sin(\pi \cdot n)}{2\pi n} - \frac{1}{4} \frac{\sin(-\pi \cdot n)}{2\pi n} \right) - \frac{2}{n\pi} \int_{-1/2}^{1/2} x \sin(2\pi n x) dx$$

$$u = x \quad v = -\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \stackrel{\text{IPP}}{=}$$

$$u' = 1 \quad v' = \sin(2\pi n x)$$

$$-\frac{2}{n\pi} \left[-x \frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} \right]_{-1/2}^{1/2} + \frac{2}{n\pi} \int_{-1/2}^{1/2} -\frac{\cos(2\pi n x)}{2\pi n} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n\pi)^2} \left(\frac{1}{2} \cos(n\pi) - \left(-\frac{1}{2}\right) \cos(-n\pi) \right) - \frac{1}{(n\pi)^2} \int_{-1/2}^{1/2} \cos(2\pi nx) dx \\
&= \frac{1}{(n\pi)^2} \cos(n\pi) - \frac{1}{(n\pi)^2} \left[\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2} - \frac{1}{(n\pi)^2} \left(\frac{\sin(n\pi)}{2\pi n} - \frac{\sin(-n\pi)}{2\pi n} \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}
\end{aligned}$$

$b_n = 2 \cdot \int_{-1/2}^{1/2} x^2 \sin(2\pi nx) dx = 0$ car on intègre une fonction impaire sur un intervalle symétrique centré en 0.

$$\Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nx) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \pi^2} \cos(2\pi nx)$$

Par le théorème de Dirichlet on que $f \in C^0 \cap C'_{\text{moy}}$,

$$\bar{f}(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = f(x)$$

$f \in C'_{\text{moy}}$

$f \in C^0$

Par exemple si $x=0$,

$$1 = f(0) = \bar{f}(0) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(0)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\text{Si } x = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{f}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Définition 4.10 : Coefficients de Fourier complexes.

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique, C^0_{loc} .

On définit les coefficients de Fourier complexes par

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} dx \quad n \in \mathbb{Z}$$

où pour $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(\varphi(x)) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(\varphi(x)) dx$

Proposition 4.11 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, T -périodique, C^0_{loc} . Alors,

$$(i) \quad \forall n \geq 1 \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$\forall n \leq -1 \quad c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$(ii) \forall n \neq 0, \quad a_n = C_n + C_{-n}$$

$$b_n = i(C_n - C_{-n})$$

$$a_0 = 2 \cdot C_0$$

$$(iii) F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N C_n e^{i \frac{2\pi}{T} n x}$$

$$F f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i \frac{2\pi}{T} n x} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N C_n e^{i \frac{2\pi}{T} n x}.$$

Prove:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

§4.3 Propriétés des séries de Fourier.

Proposition 4.12

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique, C^0 sur $\mathbb{R}$.

Alors,

(i) $Ff(x)$ est T -périodique.

(ii) Si f est paire (i.e. $f(-x) = f(x)$)

$$b_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \text{et} \quad Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)$$

(iii) Si f est impaire, (i.e. $f(-x) = -f(x)$),

$$a_n = 0 \quad \forall n \geq 0, \quad \text{et} \quad Ff(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)$$

ID de la preuve: $\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \boxed{\phantom{\sin \text{ or } \cos}}\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx \quad \boxed{\phantom{\sin \text{ or } \cos}} = \sin \text{ or } \cos.$